Sistemas de ecuaciones

Dos ecuaciones con dos incógnitas forman un sistema, cuando lo que pretendemos de ellas es encontrar una solución común a ambas.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

La solución de un sistema es un par de números x_1, y_1 , tales que reemplazando x por x_1 e y por y_1, se satisfacen a la vez ambas ecuaciones.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

solución: $x = 2$, $y = 3$

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = -6 \\ 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6 - 12 = -6 \\ 4 + 12 = 16 \end{cases} \qquad \begin{matrix} -6 = -6 \\ 16 = 16 \end{matrix}$$

Criterios de equivalencia de sistemas de ecuaciones

1º Si a **ambos miembros** de una ecuación de un sistema **se les suma o se les resta una misma expresión**, el **sistema** resultante es **equivalente**.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \begin{cases} 3x - 4y + 3 = -6 + 3 \\ x + 2y - 5y = 8 - 5y \end{cases}$$

$x = 2$, $y = 3$

2º Si **multiplicamos o dividimos ambos miembros** de las ecuaciones de un sistema **por un número distinto de cero**, el **sistema** resultante es **equivalente**.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \begin{cases} 3 \cdot (3x - 4y) = -6 \cdot 3 \\ \dfrac{2x + 4y}{2} = \dfrac{16}{2} \end{cases}$$

$x = 2$, $y = 3$

3º Si **sumamos o restamos a una ecuación** de un sistema otra ecuación **del mismo sistema**, el **sistema** resultante es **equivalente** al dado.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y + 3x - 4y = 16 - 6 \end{cases} x = 2,\ y = 3$$

4º Sin en un sistema se sustituye una ecuación por otra que resulte de sumar las dos ecuaciones del sistema previamente multiplicadas o divididas por números no nulos, resulta otro sistema equivalente al primero.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ \dfrac{2x + 4y}{2} = \dfrac{16}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y + x + 2y = -6 + 8 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \qquad x = 2, \quad y = 3$$

5º Si en un sistema s**e cambia el orden de las ecuaciones o el orden de las incógnitas**, resulta otro **sistema equivalente**.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 3x - 4y = -6 \end{cases} \qquad x = 2,\ y = 3$$

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4y + 3x = -6 \\ 4y + 2x = 16 \end{cases} \qquad x = 2,\ y = 3$$

Método de sustitución

Resolución de sistemas de ecuaciones por el método de sustitución

1 Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.

2 Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo un ecuación con una sola incógnita.

3 Se resuelve la ecuación.

4 El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.

5 Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

1 Despejamos una de las incógnitas en una de las dos ecuaciones. Elegimos la incógnita que tenga el coeficiente más bajo.

$$2x = 16 - 4y \qquad\qquad x = 8 - 2y$$

2 Sustituimos en la otra ecuación la variable x, por el valor anterior:

$$3(8 - 2y) - 4y = -6$$

3 Resolvemos la ecuación obtenida:

$$24 - 6y - 4y = -6 \qquad -10y = -30 \qquad y = 3$$

4 Sustituimos el valor obtenido en la variable despejada.

$$x = 8 - 2 \cdot 3 = 8 - 6 \qquad\qquad x = 2$$

5 Solución

$$x = 2, \ y = 3$$

Método de igualación

Resolución de sistemas de ecuaciones por el método de igualación

1 Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.

2 Se igualan las expresiones, con lo que obtenemos una ecuación con una incógnita.

3 Se resuelve la ecuación.

4 El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita.

5 Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

1 **Despejamos**, por ejemplo, la incógnita **x** de la primera y segunda ecuación:

$$3x = -6 + 4y \qquad x = \frac{-6 + 4y}{3}$$

$$2x = 16 - 4y \qquad x = \frac{16 - 4y}{2}$$

2 **Igualamos** ambas expresiones:

$$\frac{-6 + 4y}{3} = \frac{16 + 4y}{2}$$

3 **Resolvemos** la ecuación:

$$2(-6 + 4y) = 3(16 - 4y) \qquad -12 + 8y = 48 - 12y$$

$$8y + 12y = 48 + 12 \qquad 20y = 60 \qquad y = 3$$

4 **Sustituimos** el valor de **y**, en una de las dos **expresiones** en las que tenemos **despejada la x**:

$$x = \frac{-6 + 4 \cdot 3}{3} = \frac{-6 + 12}{3} \qquad x = 2$$

5 **Solución**:

$$x = 2, \; y = 3$$

Método de reducción

Resolución de sistemas de ecuaciones por el método de reducción

1 Se preparan las dos ecuaciones, multiplicándolas por los números que convenga.

2 La restamos, y desaparece una de las incógnitas.

3 Se resuelve la ecuación resultante.

4 El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve.

5 Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

Lo más fácil es suprimir la y, de este modo no tendríamos que preparar las ecuaciones; pero vamos a optar por suprimir la x, para que veamos mejor el proceso.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \xrightarrow{x2} \\ 2x + 4y = 16 \xrightarrow{x(-3)} \end{cases} \begin{cases} 6x - 8y = -12 \\ -6x - 12y = -48 \end{cases}$$

Restamos y resolvemos la ecuación:

$$\begin{cases} \cancel{6x} - 8y = -12 \\ \cancel{-6x} - 12y = -48 \end{cases}$$
$$-20y = -60 \qquad y = 3$$

Sustituimos el valor de y en la segunda ecuación inicial.

$2x + 4 \cdot 3 = 16 \qquad 2x + 12 = 16 \qquad 2x = 4 \qquad x = 2$

Solución: $x = 2, \ y = 3$

Sistemas de ecuaciones con denominadores

$$\begin{cases} \dfrac{x+3y}{2} = 5 \\ 4 - \dfrac{2x-y}{2} = 1 \end{cases}$$

Multiplicamos previamente la primera ecuación por el m.c.m. de todos los denominadores, que es 2, y hacemos lo mismo en la segunda ecuación en la que el m.c.m es también 2. Resulta pues el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 8 - 2x + y = 2 \end{cases}$$

Que ordenado resulta:

$$\begin{cases} x + 3y = 10 \\ -2x + y = -6 \end{cases}$$

Lo resolvemos por cualquiera de los métodos, en este caso, sustitución.

$$x = 10 - 3y$$

$$-2(10-3y) + y = -6 \qquad -20 + 6y + y = -6 \qquad 7y = 14 \qquad y = 2$$

$$x = 10 - 3 \cdot 2 \qquad x = 4$$

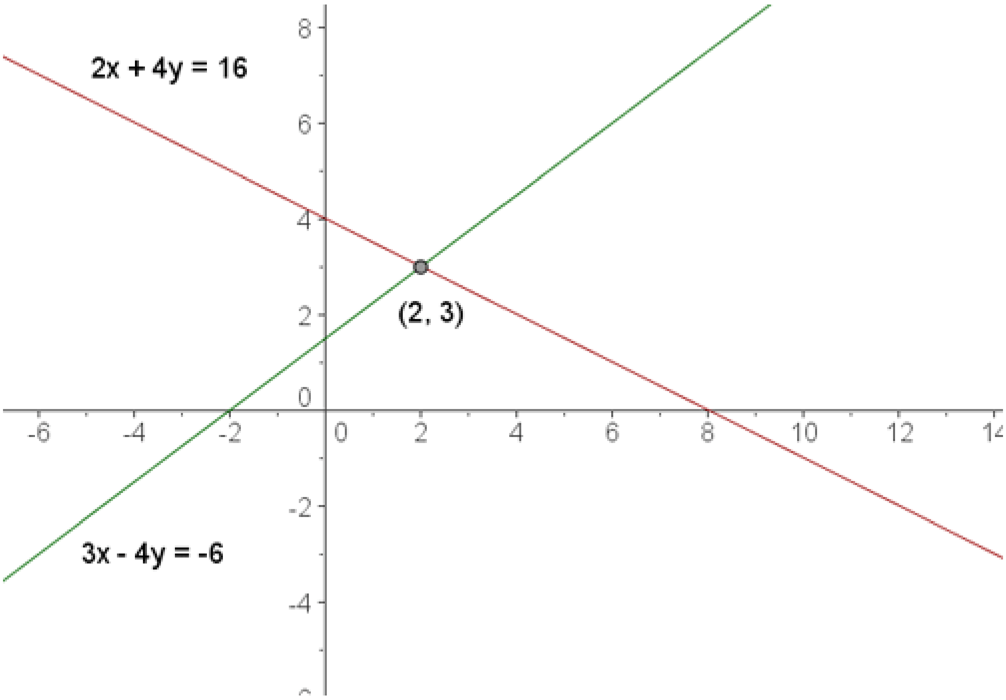
Clasificación de sistemas de ecuaciones

Sistema compatible determinado

Tiene una sola solución.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \qquad x = 2,\ y = 3$$

Gráficamente la solución es el punto de corte de las dos rectas.

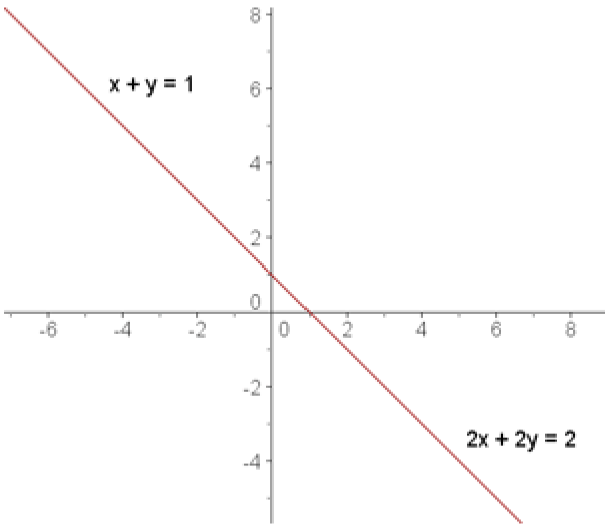


Sistema compatible indeterminado

El sistema tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x - 2y = -2 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$
$$0 = 0$$

Gráficamente obtenemos dos rectas coincidentes. Cualquier punto de la recta es solución.

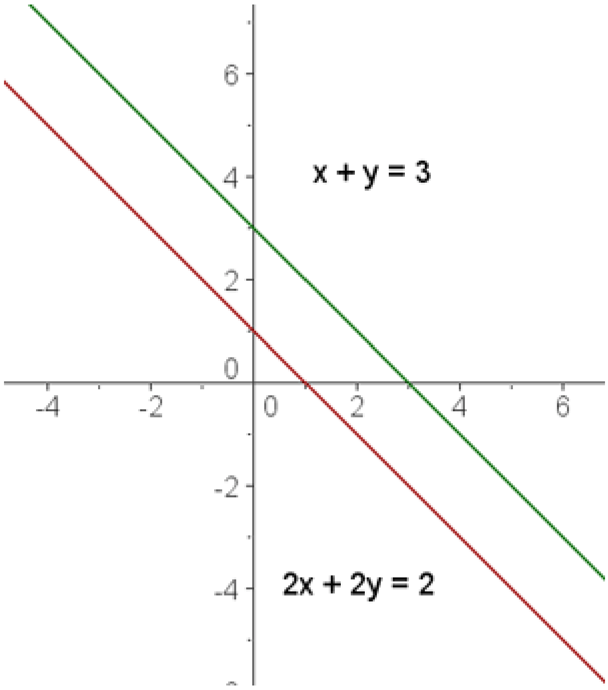


Sistema incompatible

No tiene solución

$$\begin{cases} x + \quad y = 3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x - 2y = -6 \\ \underline{2x + \; 2y = \;\; 2} \end{cases}$$
$$0 = -4$$

Gráficamente obtenemos dos rectas paralelas.



Problemas resueltos mediante sistemas de ecuaciones:

Juan compró un ordenador y un televisor por 2000 € y los vendió por 2260 €.

¿Cuánto le costó cada objeto, sabiendo que en la venta del ordenador ganó el 10% y en la venta del televisor ganó el 15%?

x $\rightarrow$ precio del ordenador.

y $\rightarrow$ precio del televisor.

$x + \frac{10x}{100} \rightarrow$ precio de venta del ordenador.

$y + \frac{15y}{100} \rightarrow$ precio de venta del televisor.

$$\begin{cases} x + y = 2000 \\ x + \frac{10x}{100} + y + \frac{15y}{100} = 2260 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 2000 \\ 110x + 115y = 226000 \end{cases} \xrightarrow{x(-110)} \begin{cases} -110x - 110y = -220000 \\ 110x + 115y = 226000 \end{cases}$$

$$5y = 6000$$

$y = 1200$

$x + 1200 = 2000 \qquad x = 800$

800 € $\rightarrow$ precio del ordenador.

1200 € $\rightarrow$ precio del televisor.

¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 16 cm y que su base es el triple de su altura?

x $\rightarrow$ base del rectángulo.

y $\rightarrow$ altura del rectángulo.

2x + 2y $\rightarrow$ perímetro.

$$\begin{cases} x = 3y \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$$

$2 \cdot (3y) + 2y = 16 \quad 6y + 2y = 16 \qquad y = 2 \qquad x = 6$

6 cm $\rightarrow$ base del rectángulo.

2 cm $\rightarrow$ altura del rectángulo.

Una granja tiene pavos y cerdos, en total hay 58 cabezas y 168 patas. ¿Cuántos cerdos y pavos hay?

x $\rightarrow$ número de pavos.

y $\rightarrow$ número de cerdos.

$$\begin{cases} x + y = 58 \\ 2x + 4y = 168 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 58 \\ 2x + 4y = 168 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x - 2y = -116 \\ 2x + 4y = 168 \end{cases}$$

$$2y = 52$$

$y = 26$

$x + 26 = 58 \qquad x = 32$

32 $\rightarrow$ número de pavos.

26 $\rightarrow$ número de cerdos.

Antonio dice a Pedro: "el dinero que tengo es el doble del que tienes tú", y Pedro contesta: "si tú me das seis euros tendremos los dos igual cantidad". ¿Cuánto dinero tenía cada uno?

x $\rightarrow$ dinero de Antonio.

y $\rightarrow$ dinero de Pedro.

$$\begin{cases} x = 2y \\ y + 6 = x - 6 \end{cases}$$

$y + 6 = 2y - 6 \qquad 6 + 6 = 2y - y \qquad 12 = y$

$x = 2 \cdot 12 \qquad x = 24$

24 € $\rightarrow$ dinero de Antonio.

12 € $\rightarrow$ dinero de Pedro.

En una empresa trabajan 60 personas. Usan gafas el 16% de los hombres y el 20% de las mujeres. Si el número total de personas que usan gafas es 11. ¿Cuántos hombres y mujeres hay en la empresa?

x $\rightarrow$ número de hombres.

y $\rightarrow$ número de mujeres.

$\frac{16x}{100} \rightarrow$ hombres con gafas.

$\frac{20y}{100} \rightarrow$ mujeres con gafas.

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ 16x + 20y = 1100 \end{cases}$$

$x = 60 - y$

$16(60 - y) + 20y = 1100 \qquad 960 - 16y + 20y = 1100$

$4y = 140 \qquad x = 35$

$x + 35 = 60 \qquad y = 25$

35 $\rightarrow$ número de hombres.

25 $\rightarrow$ número de mujeres.

La cifra de las decenas de un número de dos cifras es el doble de la cifra de las unidades, y si a dicho número le restamos 27 se obtiene el número que resulta al invertir el orden de sus cifras. ¿Cuál es ese número?

$x \rightarrow$ cifra de las unidades

$y \rightarrow$ cifra de las decenas

$10x + y \rightarrow$ número

$10y + x \rightarrow$ número invertido

$y = 2x$

$(10y + x) - 27 = 10x + y$

$10 \cdot 2x + x - 27 = 10x + 2x$

$20x + x - 12x = 27 \qquad x = 3 \qquad y = 6$

Nùmero $\rightarrow$ **63**